КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, 2006, том 51, №4, с. 680-685

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

УДК 535.882.62.001:553.1

УРАВНЕНИЕ ИЗОГИРЫ ДЛЯ ОДНООСНЫХ И ДВУОСНЫХ КРИСТАЛЛОВ

© 2006 г. В. П. Компанейцев
E-mail: VPKomp@Ramber.ru
Поступила в редакцию 06.04.2005 г.

Выведено уравнение изогиры, определяющее функциональную зависимость между координатами оптических осей и точек изогиры, действительное для любых сечений одноосных и двуосных кристаллов. Оно использовано для графического построения изогиры и решения обратной задачи — определения угла между оптическими осями и элементов ориентировки оптической индикатрисы кристаллов.

PACS: 90.60.Mk, 83.85.Ei, 42.87.-d

ВВЕДЕНИЕ

Коноскопический метод исследования кристаллов основан на наблюдении интерференционной картины, получаемой при прохождении сходящегося пучка света через кристаллическую пластинку, расположенную между скрещенными поляризатором и анализатором. Он дает ценную информацию о свойствах кристалла, таких как число оптических осей, их дисперсия и угол между ними, оптический знак кристалла.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в последние десятилетия в моделировании и интерпретации интерференционных картин, использование коноскопического метода, если его рассматривать применительно к коноскопу поляризационного микроскопа, застыло на уровне начала прошлого века. Наиболее серьезным пробелом является отсутствие ясного, однозначного понимания связи между ориентацией оптических осей кристалла и формой темных полос (изогир) на коноскопической картине. Такая связь может быть описана уравнением изогиры, располагая которым можно по входным параметрам (известным направлениям оптических осей кристалла) определить положение изогиры в поле зрения коноскопа, а также решить более ценную для практических целей обратную задачу - по координатам точек изогиры рассчитать угол между оптическими осями и элементы ориентировки оптической индикатрисы.

После первых наблюдений интерференционных фигур (последняя четверть XIX в.) многие исследователи пытались объяснить их образование и сделать графические построения изогир разными способами: расчетами на основе уравнения гиперболы [1], с помощью вспомогательных линий, показывающих направление световых колебаний в кристалле - скиодром [2], упрощенного правила Френеля [3], путем решения задачи определения направлений световых колебаний на стереографической проекции [4].

В [5, 6] изогира рассматривается как геометрическое место точек интерференционной фигуры, в которых направления световых колебаний параллельны главным сечениям николей. Такое представление об изогире противоречит очевидному факту: при падении наклонных лучей проекции на плоскость коноскопической фигуры двух взаимно перпендикулярных векторов световых колебаний в кристалле образуют в общем случае косые углы, которые не могут совмещаться с двумя взаимно перпендикулярными главными сечениями николей.

В [7] авторы воспроизвели изогиру на экране монитора в результате расчета интенсивности проходящего света для совокупности точек коноскопической картины. В качестве исходных данных они использовали главные показатели преломления Ng, N_m и Np и элементы ориентировки плоскости, секущей оптическую индикатрису в направлении, параллельном плоскости кристаллической пластинки (еще три параметра).

В [8, 9] описаны теория формирования коноскопических фигур, влияние на их облик различных типов поляризованных излучений, изменения угла между поляризатором и анализатором, установлены критерии отличия коноскопических фигур оптически активных и неактивных кристаллов. К сожалению, не все эти разработки применимы при исследовании шлифов горных пород и минералов в коноскопе поляризационного микроскопа из-за нечеткости коноскопической картины и малой толщины шлифов, вследствие чего явление вращения плоскости поляризации остается незаметным.

Целью настоящей работы является вывод уравнения изогиры и применение его для некоторых конкретных задач.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ИЗОГИРЫ

Рассмотрим, как формируется изогира коноскопической картины. Пусть между скрещенными николями поляризационного микроскопа расположена кристаллическая пластинка, вырезанная произвольным образом из двуосного кристалла. В задней фокальной плоскости объектива будет наблюдаться система светлых и темных полос, образующих коноскопическую картину.

Интенсивность света в каждой точке коноскопической картины можно записать в следующем виде:

$$B = I_0 \sin^2(\nu' - \nu'')\cos^2(\nu' + \nu''), \quad (1)$$

где I_0 – интенсивность падающего света; ν' и ν'' – углы, образуемые проекциями векторов световых колебаний *n'* и *n''* с осью *X* (т.е. с направлением световых колебаний в одном из николей, рис. 1).

Формула (1) получена автором [10] для наклонного падения света, на основе формулы, приведенной в [11] для нормального падения света.

Проекции *n'* и *n''* образуют угол α, разделенный пополам биссектрисой *MB,* ориентированной под углом 45° к оси *X,* откуда имеем: ν' = 45° – α/2 и ν'' = 45° + α/2. Сумма углов ν' + ν'' = 90°. Следовательно, интенсивность света *B* при наклоне биссектрисы к осям координат под углом 45° также равна нулю, что и является условием прохождения изогиры через заданную точку коноскопической фигуры. Это послужило основанием дать следующее определение: *изогира есть геометрическое место точек в задней фокальной плоскости объектива поляризационного микроскопа, в которых биссектрисы углов между проекциями векторов световых колебаний в кристаллической пластинке ориентированы под углом 45° к направлениям световых колебаний в николях* [10].

Угловые коэффициенты k_1, k_2 линий MN_1 и MN_2 равны:

$$k_1 = \mathrm{tg}\nu' = \mathrm{tg}(45° - \alpha/2);$$
$$k_2 = \mathrm{tg}\nu'' = \mathrm{tg}(45° + \alpha/2). \quad (2)$$

Поскольку tg(45° – α/2) tg(45° + α/2) = 1 при любых значениях α, справедливо равенство

$$k_1 k_2 = 1. \quad (3)$$

Эта лаконичная формула является ключевой в выводе уравнения изогиры. Она позволила избавиться от такой физической характеристики, как интенсивность света, и в дальнейшем иметь дело только с геометрическими величинами.

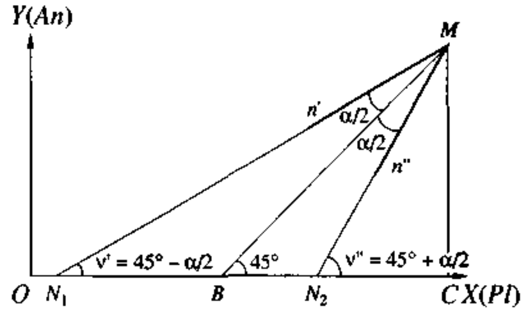

Рис 1. Условия прохождения изогиры через заданную точку *M* коноскопической фигуры. *OX* и *OY* – оси прямоугольных координат, с которыми совпадают направления световых колебаний в поляризаторе *PL* и анализаторе *An*.

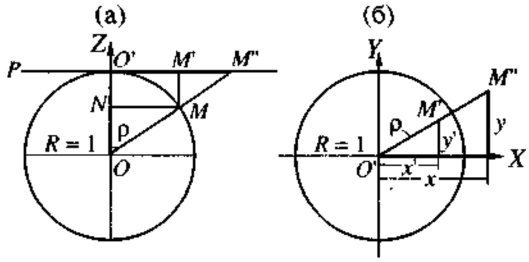

Рис 2. Ортогональная и гномоническая проекции: а – сечение, перпендикулярное плоскости проекции *P;* б – плоскость проекции *P* лежит в плоскости чертежа. *X, Y , Z* – оси прямоугольных координат.

Формула (1) была использована для воспроизведения коноскопической картины в поле зрения коноскопа [12]. Полученный результат аналогичен приведенному в [7], однако в отличие от [7] в [12] в качестве исходных данных для расчета задаются ориентации оптических осей кристалла. Преимущество такого подхода заключается в простоте нахождения направлений световых колебаний в кристалле по правилу Френеля.

Наблюдаемая в коноскопе интерференционная фигура адекватно отражается на ортогональной проекции сферической поверхности направлений световых колебаний в кристалле. Произвольная точка *M* сферы радиуса *R* проектируется на плоскость проекции *P* в точку *M* (рис. 2а). Удаление точки *M'* от центра проекции *O'* равно *O'M'* = *NM* = *R*sinρ, где ρ – полярное расстояние точки *M,* равное дуге *O'M.* Если принять *R* = 1, то *O'M'* = sinρ. Поле ортогональной проекции ограничено окружностью с радиусом, равным радиусу проектируемой сферы.

На гномонической проекции изображение точки *M* получено на пересечении продолжения радиуса *OM* с плоскостью проекции *P.* Точка *M''* удалена от центра проекции *O'* на расстояние *O'M''* = tgρ. Поле проекции ничем не ограничено и уходит в бесконечность при ρ = 90°.

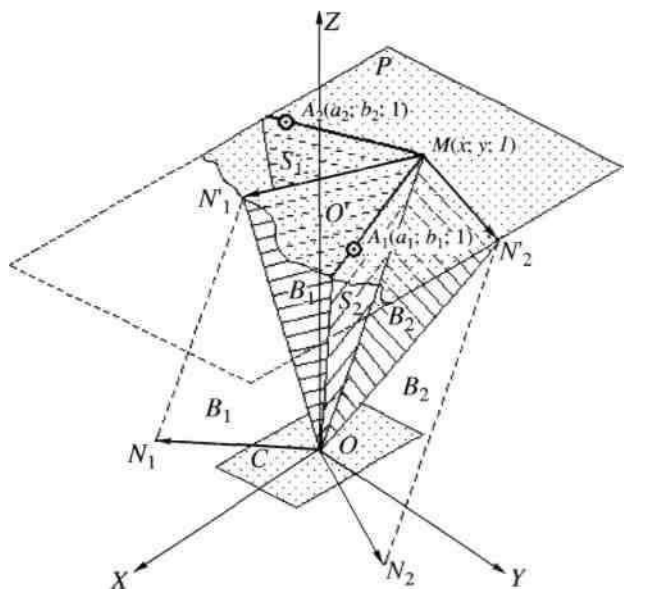

Рис. 3. Аксонометрическая проекция главных оптических сечений и плоскостей световых колебаний в двуосном кристалле.

Следует отметить, что наблюдаемая на экране коноскопическая картина, получаемая с точечным источником света, соответствует гномонической проекции.

Пересчет гномонических координат x, y в ортогональные x', y' (рис. 2б) и обратно проводится по следующим формулам:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$$
$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - x'^2 - y'^2}}, \quad y = \frac{y'}{\sqrt{1 - x'^2 - y'^2}}.$$

Наклонный луч света OM, прошедший через кристаллическую пластинку C, пересекает плоскость проекции P в точке M с гномоническими координатами x, y, 1 (рис. 3). Апликата z равна единице, так как условно принято, что плоскость проекции удалена от координатной плоскости XOY на величину R = 1 (рис. 2). Два взаимно перпендикулярных вектора световых колебаний N_1 и N_2 дают на плоскости P проекции N'_1 и N'_2 (рис. 3). Требуется определить направление (угловые коэффициенты) этих проекций, если известны гномонические координаты точек $A_1(a_1, b_1, 1)$ и $A_2(a_2, b_2, 1)$ пересечения оптических осей со сферой.

Согласно теореме Френеля в двуосных кристаллах световые колебания совершаются по биссектрисам углов между главными сечениями индикатрисы. Главным сечением индикатрисы называется плоскость, проходящая через направление нормали к волне и оптическую ось кристалла. У индикатрисы двуосного кристалла, очевидно, два главных сечения – S_1 и S_2. Их уравнения в общем виде следующие:

$$A_{1,2}x + B_{1,2}y + C_{1,2}z = 0, \tag{5}$$

где A, B, C – коэффициенты уравнений; x,y,z – координаты точек плоскости в трехмерном пространстве.

Главные сечения S_1 и S_2 проходят через точки с известными гномоническими координатами (даны в скобках): начало координат O(0, 0, 0), точку $M(x, y, 1)$ и соответственно точки A_1 (a_1, b_1, 1) и A_2(a_2, b_2, 1). Коэффициенты уравнений (5), рассчитанные по координатам этих точек, имеют значения (для C_1 и C_2 учтено, что z = 1):

$$A_{1,2} = b_{1,2} - y, \quad B_{1,2} = x - a_{1,2},$$
$$C_{1,2} = -(A_{1,2}x + B_{1,2}y). \tag{6}$$

Световые колебания в кристалле совершаются в плоскостях B_1 и B_2 биссектрис двугранных углов, образованных главными сечениями S_1 и S_2 Плоскость B_2 перпендикулярна плоскости B_1. Обе плоскости входят в состав пучка плоскостей, их уравнения имеют следующий вид, соответственно:

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z = 0,$$
$$(A_1 - \lambda A_2)x + (B_1 - \lambda B_2)y + (C_1 - \lambda C_2)z = 0, \tag{7}$$

где λ – коэффициент.

Записав выражения для косинусов углов между B_1 и S_1, S_2 и приравняв их правые части, получим

$$\lambda = ((A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)/(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2))^{1/2}. \tag{8}$$

Итак, получены уравнения (7) двух взаимно перпендикулярных плоскостей B_1 и B_2, в которых совершаются световые колебания (векторы $\mathbf{ON}_1$ и $\mathbf{ON}_2$). Линии пересечения этих плоскостей с плоскостью P представляют собой гномоническую проекцию векторов световых колебаний ON_1' и ON_2'. Подставив в (7) z = 1, получим уравнения прямых ON_1' и ON_2':

$$y_1 = -[x(A_1 + \lambda A_2) + (C_1 + \lambda C_2)]/(B_1 + \lambda B_2),$$
$$y_2 = -[x(A_1 - \lambda A_2) + (C_1 - \lambda C_2)]/(B_1 - \lambda B_2). \tag{9}$$

Угловые коэффициенты k_1 и k_2 этих прямых, очевидно, есть

$$k_1 = -(A_1 + \lambda A_2)/(B_1 + \lambda B_2),$$
$$k_2 = -(A_1 - \lambda A_2)/(B_1 - \lambda B_2). \tag{10}$$