Известия АН Республики Казахстан.
Серия геологическая, 1992, № 4

УДК 535.822.62.001:553.1

В. П. КОМПАНЕЙЦЕВ

ТЕОРИЯ ИЗОГИРЫ

I. ГЛАВНАЯ КОНОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

Дан исторический обзор основных направлений в разработке теоретических основ коноскопического метода исследования кристаллов. Приведено доказательство главной коноскопической теоремы, утверждающей, что изогира проходит через точки коноскопического поля с нулевой интенсивностью света, в которых биссектрисы углов, образованных направлениями световых колебаний в кристалле и николях, совпадают.

Коноскопический метод исследования кристаллов известен более века. Казалось бы, при таком возрасте коноскопия должна иметь тщательно отработанную теоретическую базу. В действительности же положение дел обратное: теория метода не только далека от завершения, но, что особенно пагубно, в своем развитии она застыла на уровне начала века. Об этом писал А. В. Шубников [1], имея в виду кристаллооптику в целом, и, следовательно, ее составную часть — коноскопию. В подтверждение сказанного достаточно привести тот факт, что из-за отсутствия теоретических предпосылок до настоящего времени не разработаны способы коноскопического измерения угла оптических осей и ориентировки оптической индикатрисы в нецентрированных (косых) сечениях кристаллов.

В истории разработки теоретических основ коноскопического метода исследования кристаллов можно выделить четыре этапа.

Ранний этап (последняя четверть 19 в.). Исследования этого периода посвящались в основном объяснению природы интерференционных фигур, наблюдаемых в коноскопе, и способам определений осности, оптического знака и угла оптических осей кристаллов. В это время А. Мишель-Леви [2] вывел первое уравнение изогиры, математически соответствующее уравнению гиперболы. Позже Ф. Райт [3] отметил ошибки в построениях Мишель-Леви, которые заключались в неправильной трактовке закона Френеля при определении направления световых колебаний на плоскости. Тем не менее в дальнейшем гиперболическая модель изогиры как строго доказанная вошла в учебники по кристаллооптике, в том числе и советские [4, 5].

Второй этап (первая четверть 20 в.) известен как время длительного (1904—1923 гг.) диспута между Ф. Бекке и Ф. Райтом. Темой диспута являлась разработка теории изогиры в связи с обоснованием коноскопического метода измерения угла оптических осей в центрированных сечениях кристаллов. В своих построениях изогиры Ф. Бекке исходил из предложенной им теории скиодром, под которыми он понимал ортогональную проекцию вспомогательных линий на сфере, показывающих направление световых колебаний [6]. Условием прохождения изогиры через заданную точку коноскопического поля является совпадение направления скиодромы с направлением световых колебаний в одном из николей.

Подход Ф. Райта к построению изогиры заключался в выводе ее уравнения исходя из приближенной гиперболической модели Мишель-Леви. Несмотря на это, предложенные им уравнения для центрированных сечений оказались довольно точными. На их основе построена широко известная диаграмма Ф. Райта для определения угла оптических осей по кривизне изогиры в сечении, перпендикулярном оптической оси [7].

Итоги диспута подвел Ф. Райт [8], который пришел к неутешительному выводу: ни одна из предложенных им и его оппонентом моделей изогиры не является точной и может быть принята лишь в качестве аппроксимации. Это пессимистическое заключение отрицательно повлияло на дальнейшее развитие, теории изогиры.

Третий этап (1926–1957 гг.) может быть охарактеризован как время безраздельного господства теории скиодром и застоя в разработке теории изогиры. Хотя сам автор теории скиодром Ф. Бекке не настаивал на ее абсолютной точности, в дальнейшем его последователи воспринимали ее как строго доказанную, а критический анализ Ф. Райта был забыт.

Из наиболее значительных работ рассматриваемого этапа следует отметить монографию А. В. Шубникова [1], в которой даны оригинальные объяснения оптических явлений, наблюдаемых в коноскопе, и описан известный опыт по моделированию коноскопических интерференционных фигур с помощью кристаллического шарика, помещенного между двумя поляроидами.

Современный этап (с конца 50-х гг.) ознаменовался заметными успехами в создании математической модели изогиры в связи с появле-нием быстродействующих электронно-вычислительных машин. Он начался с публикации большой статьи У. Камба [9], в которой автор
показал физическую несостоятельность теории скиодром, что имело большое значение для стимулирования дальнейших теоретических

исследований. Вторая заслуга У. Камба – детальный анализ явления вращения плоскости поляризаций на границах воздух – кристаллическая пластинка и воздух – линзы объектива. Сложность этого явления отпугивала исследователей от разработки теории изогиры. У. Камб показал, что хотя эффект вращения плоскости поляризации может быть значительным и достигать 10–15°, его влияние на положение изогиры ничтожно, так как под кристаллической пластинкой и над ней вращение происходит в противоположных направлениях, что приводит к взаимной компенсации. Что же касается вклада У. Камба в разработку теории изогиры, то он оказался небольшим. Им были предложены приближенные уравнения изогиры для центрированных коноскопических фигур, основанные на теории скиодром, в которую он внес корректирующие поправки, не имеющие строгой физической основы.

Следующий значительный шаг в развитии теории изогиры – публикация статьи К. Бетке и Р. Бирни [10]. В ней авторы предложили новую, векторную модель изогиры. Коноскопическая картина рассматривается ими как совокупность дискретных лучей поляризованного света, проходящих при разных углах наклона через кристаллическую пластинку и анализатор и образующих в верхней фокальной плоскости объектива изображение источника света, осложненное явлениями интерференции. Расчеты интенсивности света в. каждой точке коноскопического поля ведутся с помощью компьютера. В качестве исходных данных, используются показатели преломления кристалла n_g, n_m и n_p и ориентировка оптической индикатрисы (еще три параметра). Луч света, идущий от источника в заданную точку коноскопического поля, рассматривается в качестве вектора. Для нахождения направлений световых колебаний индикатрису, имеющую вид трехосного эллипсоида с осями N_g, N_m и N_p, рассекают плоскостью, перпендикулярной лучу. В сечении получается эллипс, малая и большая оси которого определяются с использованием итерационных вычислительных методов. Специальными приемами исходный вектор разлагается на две составляющие, ориентированные по осям эллипса, которые затем проецируются на плоскость столика микроскопа с образованием новых векторов. Последние с помощью операций умножения и вычитания векторов преобразуются в результирующий вектор, характеризующий интенсив-ность света в заданной точке коноскопического поля.

Подобная, достаточно сложная вычислительная процедура выпол-няется для всей совокупности точек в поле зрения коноскопа. Резуль-таты вычислений воспроизводятся на экране компьютера в виде изобра-жения изогир. Приведенные в статье фотографии компьютерных изобра-жений не оставляют никакого сомнения в их соответствии реально наблюдаемым в коноскопе изогирам для различных сечений индикат-рисы.

Из приведенного обзора видно, что все попытки описать изогиру на языке математики сводятся к трем моделям: гиперболической, скиодромной и векторной. Первые две модели как физически несостоятельные должны быть отвергнуты. Векторная модель дает хорошие результаты, но ее реализация связана со сложной, вычислительной процедурой. Другим ее недостатком является использование в качестве входных параметров не координат оптических осей, а показателей преломления n_g, n_m и n_p, из-за чего создается ложное представление о невозможности решения обратной коноскопической задачи (определение по изогире угла оптических осей и ориентировки оптической индикатрисы).

В настоящей статье описана новая теория изогиры, с помощью которой разработана относительно простая универсальная модель, пригодная для расчетов при любых сечениях индикатрисы. В ее основу положена главная коноскопическая теорема, которая утверждает: *изогира есть геометрическое место точек в задней фокальной плоскости объектива поляризационного микроскопа, в которых биссектрисы углов между направлениями световых колебаний в николях, и проекциями направлений световых колебаний в кристаллической пластинке совпадают.* Доказательство этой теоремы сводится к выводу формулы интенсивности света в заданной точке коноскопического поля.

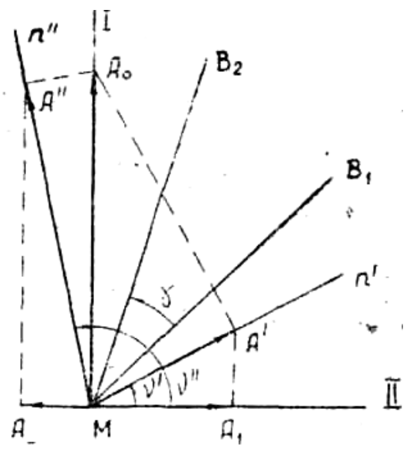

Рис. 1. Схема доказательства главной коноскопической теоремы

Допустим, что в произвольной точке M (рис. 1), наблюдаемой в коноскопе, известны направления световых колебаний в николях I и II и проекции направлений световых колебаний в кристаллической пластинке – n' и n''. Николи скрещены, т. е. угол между I и II прямой. Угол между n' и n'' может быть произвольным, так как он является проекцией сторон прямого угла, по которым совершаются световые колебания в луче света, косо пересекающем кристаллическую пластинку*.

Пусть в кристаллическую пластинку, ориентированную параллельно плоскости рисунка, из поляризатора поступает луч поляризованного света с амплитудой A_0, световые колебания в котором совершаются вдоль направления I. Войдя в кристаллическую пластинку, он разложится на две составляющие A' и A'', колебания в которых совершаются по двум направлениям n' и n'', являющимся проекцией осей косого эллиптического сечения оптической индикатрисы. Согласно закону Малюса, амплитуды этих составляющих равны

$$A' = A_0 \cos(90° - \nu') = A_0 \sin\nu';$$
$$A'' = A_0 \cos(\nu'' - 90°) = A_0 \sin\nu'',$$

* Здесь и далее для удобства используем термин «луч», имея в виду при этом, что в анизотропных средах мы имеем дело с волновыми норм'алями.

где ν' и ν'' – углы, образуемые n' и n'' **с** направлением световых колебаний в анализаторе II.

Проходя через второй николь, оба луча вновь изменяют свою амплитуду, которая определяется как проекция векторов A' и A'' на направление II:

$$A_1 = A' \cos\nu' = A_0 \sin\nu' \cos\nu',$$
$$A_2 = A'' \cos\nu'' = A_0 \sin\nu'' \cos\nu''.$$

Суммарная амплитуда световых колебаний, прошедших через второй николь, рассчитывается по формуле

$$A^2 = (A_1 + A_2)^2 - 4A_1A_2\sin^2(\Delta/2),$$

в которой суммарный вектор A рассматривается как диагональ параллелограмма, стороны которого образованы векторами A_1 и A_2, образующими между собой угол Δ [1]**.** Величина последнего характеризует сдвиг фаз двух гармонических колебаний. Подставляя в эту формулу значения A_1 и A_2 и используя известные из тригонометрии формулы

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

после преобразований получаем

$$A^2 = A_0^2\cos(\nu'+\nu'')\sin^2(\nu'-\nu'') + A_0^2\sin 2\nu'\sin 2\nu''\sin^2(\Delta/2). \qquad (1)$$

Разность фаз Δ в этой формуле зависит от разности хода световых лучей и длины волны света и может быть выражена в виде известной из кристаллооптики формулы:

$$\Delta = 2\pi\frac{d(n_1 - n_2)}{\lambda},$$

где d – путь, пройденный лучом в кристалле; $n_1 - n_2$ – разность показателей преломления в данном сечении оптической индикатрисы; λ – длина волны света.

Интенсивность света I прямо пропорциональна квадрату амплитуды световых колебаний A^2. С учетом этого формулу (1) после замены A^2 и A_0^2 интенсивностями света I и I_0 можно записать в виде

$$I = I_0\cos^2(\nu'+\nu'')\sin^2(\nu'-\nu'') + I_0\sin 2\nu'\sin 2\nu''\sin^2\frac{\pi d(n_1-n_2)}{2}.$$

или сокращенно

$$I = B + C.$$

Первый член формулы интенсивности света

$$B = I_0\cos^2(\nu'+\nu'')\sin^2(\nu'-\nu''), \qquad (2)$$

не содержит длины волны λ и, следовательно, определяет количество белого света, прошедшего через кристалл и второй николь (белая компонента). Второй член формулы – *C,* напротив, содержит длину волны λ и потому определяет интерференционную окраску коноскопической фигуры (цветная компонента). Эта компонента участвует в образовании цветных колец (изохром), не имеющих никакого отношения к изогире, и поэтому из дальнейшего рассмотрения исключается.

Из формулы (2) видно, что белая компонента зависит только от начальной интенсивности света I_0, поступающего в кристаллическую пластинку, и углов ν' и ν'', определяющих направления световых колебаний в кристалле n' и n''. Разность $\nu'–\nu''$ не может быть равной нулю и, следовательно, второй сомножитель формулы – $\sin^2(\nu'–\nu'')$ всегда больше нуля. Это означает, что локализация изогиры, проходящей через точки с нулевой интенсивностью света, определяется только суммой углов $\nu' + \nu''$. Преобразуем формулу (2) с заменой $\nu' + \nu''$ углом λ между биссектрисами B_1 и B_2, делящими пополам направления световых колебаний в кристалле и николях соответственно I и II, n' и n''. Этот угол равен:

$$\gamma = (\nu' + \nu'')/2 - 45°$$

где – $(\nu' + \nu'')/2$ – угол наклона биссектрисы B_2; 45° – угол наклона биссектрисы B_1 световых колебаний в николях, одинаковый по всему полю зрения коноскопа. Из этого выражения найдем сумму $\nu' + \nu'' = 2\gamma + 90°$ и подставим ее в формулу (2):

$$B = I_0\cos^2 (2\gamma+90°) \sin^2 (\nu'- \nu'') = I_0\sin^2 2\gamma \sin^2(\nu'- \nu'') . \quad (3)$$

При повороте столика микроскопа происходит вращение кристаллической пластинки и вместе с ней направлений световых колебаний n' и n'' и биссектрисы B_2. Биссектриса B_2 при этом не меняет своего положения. При определенном положении столика биссектрисы B_1 и B_2 совпадут, т. е. угол между ними будет равен нулю. В этот момент интенсивность белой компоненты достигает нулевого значения, так как один из сомножителей – $\sin^2 2\gamma$ в формуле (3) будет равен нулю. Из этого вытекает очень важное правило построения коноскопической фигуры: изогира проходит через точки коноскопического поля с нулевой интенсивностью белого света, в которых биссектрисы углов, образованных направлениями световых колебаний в кристаллической пластинке (в проекции на плоскость, перпендикулярную оптической оси коноскопа) и николях, совпадают, что и требовалось для доказательства главной коноскопической теоремы*, формулировка которой приведена ранее.

----

* Главная коноскопическая теорема справедлива не только для скрещенных, но и для косо ориентированных относительно друг друга николей.

Изложенная теория (ее можно назвать теорией биссектрис) может служить основой для графического построения изогиры. Задача упрощается, если на ортографическую проекцию нанести вспомогательные линии – *изотомы* (в переводе с греческого – равносекущие), показывающие направление биссектрис световых колебаний в кристалле. Заметим, что ранее мы оперировали только одной биссектрисой B_2. Фактически их две, так как смежный тупой угол между направлениями n' и n'' также имеет свою биссектрису B_2 (рис. 2), причем B_1' и B_2'' всегда взаимно перпендикулярны. Обе биссектрисы показаны на рис. 3 в виде крестиков, причем одна биссектриса параллельна касательной к изотоме.

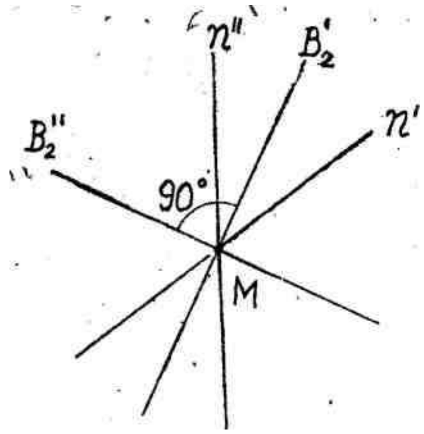

Рис. 2. Схема соотношения двух биссектрис световых колебаний в кристалле: n' и n'' – проекции направлений световых колебаний в кристалле; B_2' – биссектриса острого угла;

B_2'' – биссектриса тупого угла

Для каждой биссектрисы можно построить свою систему изотом. На рис. 3 показана только одна из них. Вторая система является зеркальным отображением первой. Она не несет никакой дополнительной информации и во избежание перегрузки на рисунке не показана.

Для графического определения ориентировки биссектрисы необходимо провести касательную к изотоме в заданной точке коноскопического поля. Вторая биссектриса ориентирована перпендикулярно к касательной. Положение изогиры определяется по точкам, в которых биссектрисы ориентированы под углом 45° к осям координат.

Изотомы одноосного кристалла в сечении, перпендикулярном оптической оси, представляет систему логарифмических спиралей (рис. 3, *а),* описываемых полярным уравнением:

$$r = ke^{\varphi+\varphi_0}$$

где r – расстояние точки спирали до центра координат; k – масштабный коэффициент; e – основание натурального логарифма; φ – полярный угол точки спирали, (рад); φ_0 – полярный угол конца спирали. Изогира, построенная по изотомам для данного сечения, имеет вид

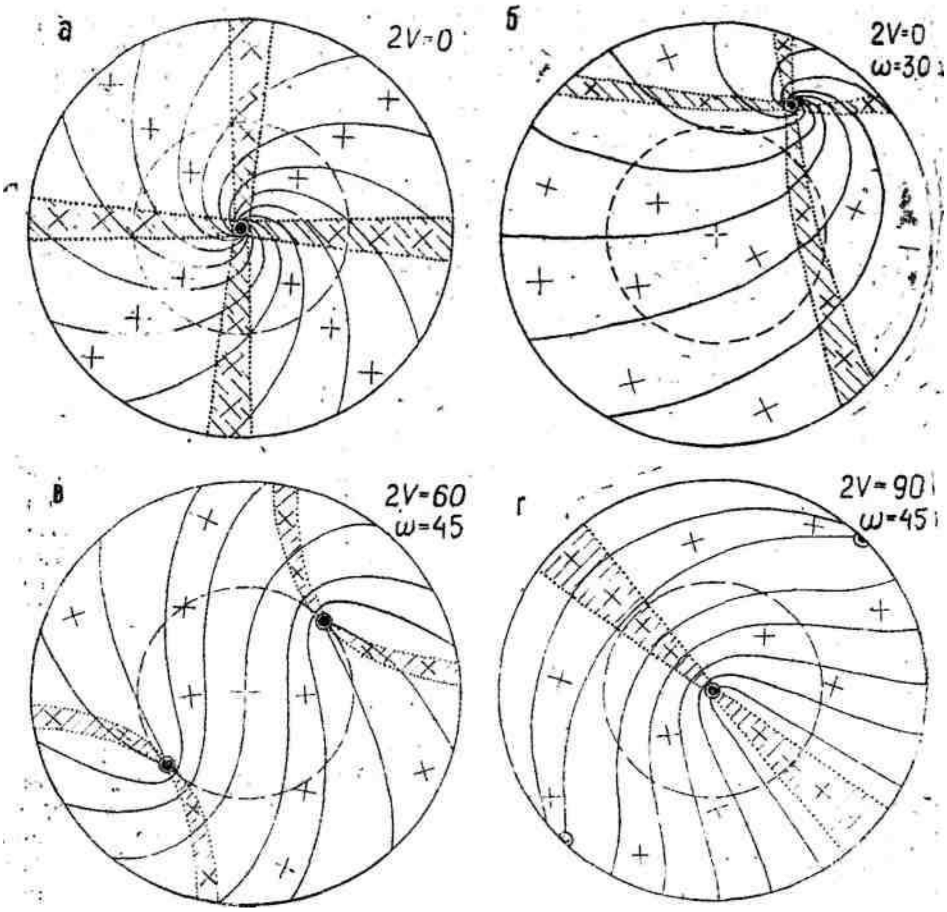

Рис. 3. Изотомы и построенные с их помощью изогиры для различных сечений кристаллов: *а* – одноосный кристалл, сечение, перпендикулярное оптической оси; *б* – то же, косое сечение; *в* – двуосный кристалл, сечение, перпендикулярное острой биссектрисе; *г* – то же, сечение, перпендикулярное оптической оси. Малая окружность внутри проекции – приблизительная граница поля зрения коноскопа при работе с объективом 60 *. Кружками показаны выходы оптических осей, крестиками – биссектрисы световых колебаний в кристалле, сплошные линии – изотомы, точечный пунктир – контур изогир; $2V$ – угол оптических осей, ω – угол поворота столика микроскопа относительно положения погасания кристалла.

креста, не меняющего своего положения при вращении столика микро скопа.

Изотомы одноосного кристалла в сечении с наклонной оптической осью представляют собой систему сжатых,. как бы деформированных логарифмических спиралей (рис. 3, *б*). Построенная по ним изогира для случая, когда столик микроскопа повернут на 30° от положения погасания кристалла, имеет вид косого креста, часть которого в форме слегка искривленной балки попадает в поле зрения коноскопа (пунктирная окружность).

Двуосный кристалл в сечении, перпендикулярном острой биссектрисе, дает изотомы, форма которых напоминает две кометы с оптическими осями в головной части и изогнутыми хвостами (рис. 3, *в*). Разделяющее их пространство заполнено *S*-образными изотомами. Изогира для этого сечения (после поворота столика микроскопа на 45°) представлена двумя ветвями фигуры, сходной с гиперболой.

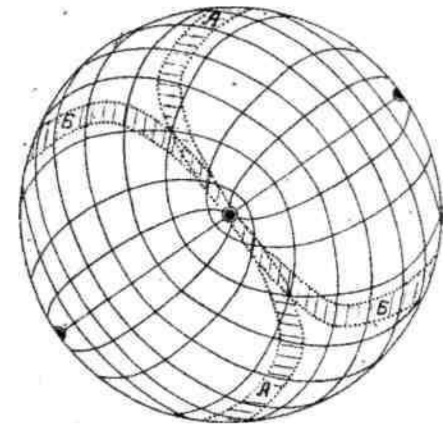

Рис. 4. Скиодромы и ложные изогиры для того же сечения двуосного кристалла, что и на рис. 3, *г*. А – изогира, построенная по николю, пропускающему горизонтальные световые колебания; Б–то же, по николю, пропускающему вертикальные световые колебания

На рис. 3, *г* показаны изотомы и изогира для двуосного кристалла с $2V = 90°$ в сечении, перпендикулярном оптической оси. Известно, что в данном случае изогира прямая, сохраняющая свою форму при вращении столика микроскопа. Это сечение может служить в качестве теста для проверки выдвигаемой теории изогиры. Изогира, построенная по изотомам, не искривлена и при любом положении столика микроскопа ее форма не меняется.

Для сравнения на рис. 4 приведены изогиры, построенные по скиодромам. Изогира А соответствует точками, в которых направление скиодром совпадает с вертикальной ориентировкой световых колебаний в одном из николей, Б – с горизонтальной. Обе изогиры *S*-образно изогнуты и, следовательно, теория скиодром на данном примере не под тверждается.

Из приведенных примеров можно сделать вывод о полном соответствии изогир, построенных с использованием изотом, реально наблюдаемым коноскопическим фигурам, что подтверждает правильность теоретических представлений, изложенных в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шубников А. В.* Оптическая кристаллография. М.; Л., 1950. 275 с.
2. *Michel-Levi A.* and *Lacroix A.* Les Mineraux des Roches. Librairie Polytechnique. Baudry, Paris, 1888. P. 94–95.
3. *Wright F. E.* The measurement of the optic axial angle of minerals in thin section // Am. J. Sci. 1907. V. 174. P. 317–369.
4. *Белянкин Д. С., Петров В. П.* Кристаллоптика. М., 1951. 128 с.
5. *Татарский В. Б.* Кристаллооптика и иммерсионный метод исследования кристаллов. М., 1965. 306 с.
6. *Becke F.* Die Skiodromen // Tscherm miner und petr. 1905. Mitt. 24. P. 1–34.
7. *Wright F. E.* The methods of petrographic-microscopic research // Carnegie Institution of Washington. 1911. Publication no. 158. 200 p.
8. *Wright F. E.* The formation of interference figures, a study of the phenomena exhibited by transparent inactive crystal plates in convergent polarized light // J. Opt. Soc. Am. 1923. V. 7. P. 779–817.
9. *Kamb W. B.* Isogyres in interference figures // Am. Mineral. 1958. V. 43. P. 1029– 1067.
10. *Bethke C. M.* and *Birnie R. W.* Computer synthesis of optical interference figures // Am. Mineral. 1980. V. 65. P. 1294–1301.

Summary

Historical review of principal trends in theoretical base development of conoscopic method of crystal studying is given. The proof of the principal conoscopic theorem is presented. The theorem states that an isogyra passes through the points of the conoscopic field with zero intensity, of light, where the bisectors of angles, formed by light variations, in a crystal and nicols, are fair.

Институт геологических наук
им.К. И. Сатпаева АН Республики
Казахстан, г. Алма-Ата