

===== **ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА** =====
КРИСТАЛЛОВ

УДК 535.882.62.001:553.1

**УРАВНЕНИЕ ИЗОГИРЫ ДЛЯ ОДНООСНЫХ
И ДВУОСНЫХ КРИСТАЛЛОВ**

© 2006 г. В. П. Компанейцев

E-mail: VPKomp@Ramber.ru

Поступила в редакцию 06.04.2005 г.

Выведено уравнение изогир, определяющее функциональную зависимость между координатами оптических осей и точек изогир, действительное для любых сечений одноосных и двuosных кристаллов. Оно использовано для графического построения изогир и решения обратной задачи — определения угла между оптическими осями и элементов ориентировки оптической индикатрисы кристаллов.

PACS: 90.60.Mk, 83.85.Ei, 42.87.-d

ВВЕДЕНИЕ

Коноскопический метод исследования кристаллов основан на наблюдении интерференционной картины, получаемой при прохождении сходящегося пучка света через кристаллическую пластинку, расположенную между скрещенными поляризатором и анализатором. Он дает ценную информацию о свойствах кристалла, таких как число оптических осей, их дисперсия и угол между ними, оптический знак кристалла.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в последние десятилетия в моделировании и интерпретации интерференционных картин, использование коноскопического метода, если его рассматривать применительно к коноскопу поляризационного микроскопа, застыло на уровне начала прошлого века. Наиболее серьезным пробелом является отсутствие ясного, однозначного понимания связи между ориентацией оптических осей кристалла и формой темных полос (изогир) на коноскопической картине. Такая связь может быть описана уравнением изогир, располагая которым можно по входным параметрам (известным направлениям оптических осей кристалла) определить положение изогир в поле зрения коноскопа, а также решить более ценную для практических целей обратную задачу - по координатам точек изогир рассчитать угол между оптическими осями и элементы ориентировки оптической индикатрисы.

После первых наблюдений интерференционных фигур (последняя четверть XIX в.) многие исследователи пытались объяснить их образование и сделать графические построения изогир разными способами: расчетами на основе уравнения гиперболы [1], с помощью вспомогательных линий, показывающих направление световых колебаний в кристалле - скиндром [2], упрощенного правила

Френеля [3], путем решения задачи определения направлений световых колебаний на стереографической проекции [4].

В [5, 6] изогир рассматривается как геометрическое место точек интерференционной фигуры, в которых направления световых колебаний параллельны главным сечениям николей. Такое представление об изогире противоречит очевидному факту: при падении наклонных лучей проекции на плоскость коноскопической фигуры двух взаимно перпендикулярных векторов световых колебаний в кристалле образуют в общем случае косые углы, которые не могут совмещаться с двумя взаимно перпендикулярными главными сечениями николей.

В [7] авторы воспроизвели изогир на экране монитора в результате расчета интенсивности проходящего света для совокупности точек коноскопической картины. В качестве исходных данных они использовали главные показатели преломления N_g , N_m и N_p и элементы ориентировки плоскости, секущей оптическую индикатрису в направлении, параллельном плоскости кристаллической пластинки (еще три параметра).

В [8, 9] описаны теория формирования коноскопических фигур, влияние на их облик различных типов поляризованных излучений, изменения угла между поляризатором и анализатором, установлены критерии отличия коноскопических фигур оптически активных и неактивных кристаллов. К сожалению, не все эти разработки применимы при исследовании шлифов горных пород и минералов в коноскопе поляризационного микроскопа из-за нечеткости коноскопической картины и малой толщины шлифов, вследствие чего явление вращения плоскости поляризации остается незаметным.

Целью настоящей работы является вывод уравнения изогир и применение его для некоторых конкретных задач.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ИЗОГИРЫ

Рассмотрим, как формируется изогир коноскопической картины. Пусть между скрещенными николями поляризационного микроскопа расположена кристаллическая пластинка, вырезанная произвольным образом из двуосного кристалла. В задней фокальной плоскости объектива будет наблюдаться система светлых и темных полос, образующих коноскопическую картину.

Интенсивность света в каждой точке коноскопической картины можно записать в следующем виде:

$$B = I_0 \sin^2(v' - v'') \cos^2(v' + v''), \quad (1)$$

где I_0 – интенсивность падающего света; v' и v'' – углы, образуемые проекциями векторов световых колебаний n' и n'' с осью X (т.е. с направлением световых колебаний в одном из николей, рис. 1).

Формула (1) получена автором [10] для наклонного падения света, на основе формулы, приведенной в [11] для нормального падения света.

Проекции n' и n'' образуют угол α , разделенный пополам биссектрисой MB , ориентированной под углом 45° к оси X , откуда имеем: $v' = 45^\circ - \alpha/2$ и $v'' = 45^\circ + \alpha/2$. Сумма углов $v' + v'' = 90^\circ$. Следовательно, интенсивность света B при наклоне биссектрисы к осям координат под углом 45° также равна нулю, что и является условием прохождения изогир через заданную точку коноскопической фигуры. Это послужило основанием дать следующее определение: *изогир есть геометрическое место точек в задней фокальной плоскости объектива поляризационного микроскопа, в которых биссектрисы углов между проекциями векторов световых колебаний в кристаллической пластинке ориентированы под углом 45° к направлениям световых колебаний в николях* [10].

Угловые коэффициенты k_1 , k_2 линий MN_1 и MN_2 равны:

$$\begin{aligned} k_1 &= \operatorname{tg} v' = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha/2); \\ k_2 &= \operatorname{tg} v'' = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha/2). \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha/2) \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha/2) = 1$ при любых значениях α , справедливо равенство

$$k_1 k_2 = 1. \quad (3)$$

Эта лаконичная формула является ключевой в выводе уравнения изогир. Она позволила избавиться от такой физической характеристики, как интенсивность света, и в дальнейшем иметь дело только с геометрическими величинами.

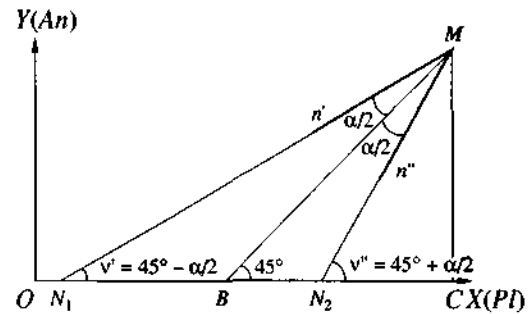


Рис 1. Условия прохождения изогир через заданную точку M коноскопической фигуры. OX и OY – оси прямоугольных координат, с которыми совпадают направления световых колебаний в поляризаторе PL и анализаторе An .

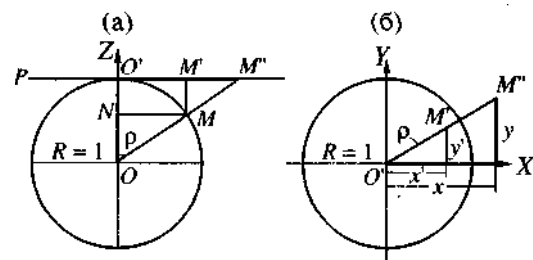


Рис 2. Ортогональная и гномоническая проекции: а – сечение, перпендикулярное плоскости проекции P ; б – плоскость проекции P лежит в плоскости чертежа. X, Y, Z – оси прямоугольных координат.

Формула (1) была использована для воспроизведения коноскопической картины в поле зрения коноскопа [12]. Полученный результат аналогичен приведенному в [7], однако в отличие от [7] в [12] в качестве исходных данных для расчета задаются ориентации оптических осей кристалла. Преимущество такого подхода заключается в простоте нахождения направлений световых колебаний в кристалле по правилу Френеля.

Наблюдаемая в коноскопе интерференционная фигура адекватно отражается на ортогональной проекции сферической поверхности направлений световых колебаний в кристалле. Произвольная точка M сферы радиуса R проектируется на плоскость проекции P в точку M (рис. 2а). Удаление точки M' от центра проекции O' равно $O'M' = NM = R \sin \rho$, где ρ – полярное расстояние точки M , равное дуге $O'M$. Если принять $R = 1$, то $O'M' = \sin \rho$. Поле ортогональной проекции ограничено окружностью с радиусом, равным радиусу проектируемой сферы.

На гномонической проекции изображение точки M получено на пересечении продолжения радиуса OM с плоскостью проекции P . Точка M'' удалена от центра проекции O' на расстояние $O'M'' = \operatorname{tg} \rho$. Поле проекции ничем не ограничено и уходит в бесконечность при $\rho = 90^\circ$.

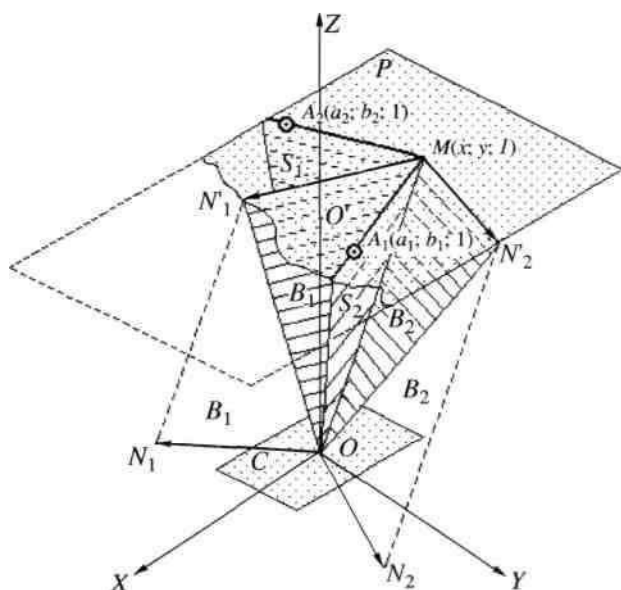


Рис. 3. Аксонометрическая проекция главных оптических сечений и плоскостей световых колебаний в двуосном кристалле.

Следует отметить, что наблюдаемая на экране коноскопическая картина, получаемая с точечным источником света, соответствует гномонической проекции.

Пересчет гномонических координат x, y в ортогональные x', y' (рис. 2б) и обратно проводится по следующим формулам:

$$x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$$

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - x'^2 - y'^2}}, \quad y = \frac{y'}{\sqrt{1 - x'^2 - y'^2}}.$$

Наклонный луч света OM , прошедший через кристаллическую пластинку C , пересекает плоскость проекции P в точке M с гномоническими координатами $x, y, 1$ (рис. 3). Апликата z равна единице, так как условно принято, что плоскость проекции удалена от координатной плоскости XOY на величину $R = 1$ (рис. 2). Два взаимно перпендикулярных вектора световых колебаний N_1 и N_2 дают на плоскости P проекции N'_1 и N'_2 (рис. 3). Требуется определить направление (угловые коэффициенты) этих проекций, если известны гномонические координаты точек $A_1(a_1, b_1, 1)$ и $A_2(a_2, b_2, 1)$ пересечения оптических осей со сферой.

Согласно теореме Френеля в двуосных кристаллах световые колебания совершаются по биссектрисам углов между главными сечениями индикатрисы. Главным сечением индикатрисы называется плоскость, проходящая через направление

нормали к волне и оптическую ось кристалла. У индикатрисы двуосного кристалла, очевидно, два главных сечения — S_1 и S_2 . Их уравнения в общем виде следующие:

$$A_{1,2}x + B_{1,2}y + C_{1,2}z = 0, \quad (5)$$

где A, B, C — коэффициенты уравнений; x, y, z — координаты точек плоскости в трехмерном пространстве.

Главные сечения S_1 и S_2 проходят через точки с известными гномоническими координатами (даны в скобках): начало координат $O(0, 0, 0)$, точку $M(x, y, 1)$ и соответственно точки $A_1(a_1, b_1, 1)$ и $A_2(a_2, b_2, 1)$. Коэффициенты уравнений (5), рассчитанные по координатам этих точек, имеют значения (для C_1 и C_2 учтено, что $z = 1$):

$$A_{1,2} = b_{1,2} - y, \quad B_{1,2} = x - a_{1,2},$$

$$C_{1,2} = -(A_{1,2}x + B_{1,2}y). \quad (6)$$

Световые колебания в кристалле совершаются в плоскостях B_1 и B_2 биссектрис двугранных углов, образованных главными сечениями S_1 и S_2 . Плоскость B_2 перпендикулярна плоскости B_1 . Обе плоскости входят в состав пучка плоскостей, их уравнения имеют следующий вид, соответственно:

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z = 0, \quad (7)$$

$$(A_1 - \lambda A_2)x + (B_1 - \lambda B_2)y + (C_1 - \lambda C_2)z = 0,$$

где λ — коэффициент.

Записав выражения для косинусов углов между B_1 и S_1, S_2 и приравняв их правые части, получим

$$\lambda = ((A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)/(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2))^{1/2}. \quad (8)$$

Итак, получены уравнения (7) двух взаимно перпендикулярных плоскостей B_1 и B_2 , в которых совершаются световые колебания (векторы ON_1 и ON_2). Линии пересечения этих плоскостей с плоскостью P представляют собой гномоническую проекцию векторов световых колебаний ON'_1 и ON'_2 . Подставив в (7) $z = 1$, получим уравнения прямых ON'_1 и ON'_2 :

$$y_1 = -[x(A_1 + \lambda A_2) + (C_1 + \lambda C_2)]/(B_1 + \lambda B_2), \quad (9)$$

$$y_2 = -[x(A_1 - \lambda A_2) + (C_1 - \lambda C_2)]/(B_1 - \lambda B_2).$$

Угловые коэффициенты k_1 и k_2 этих прямых, очевидно, есть

$$k_1 = -(A_1 + \lambda A_2)/(B_1 + \lambda B_2),$$

$$k_2 = -(A_1 - \lambda A_2)/(B_1 - \lambda B_2). \quad (10)$$

Из (3), последовательно используя (10), (8) и (6), получаем

$$bx^3 + ay^3 - ax^2y - bxy^2 - cx^2 - cy^2 + 2(d - 2)xy + 2bx + 2ay - 2c = 0, \quad (11)$$

где x, y - гномонические координаты точек изогир;

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2, & b &= b_1 + b_2, \\ c &= a_1b_2 + a_2b_1, & d &= a_1a_2 + b_1b_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, мы получили математическую модель изогир в виде уравнения третьей степени в гномонических координатах. Оно может быть приведено к кубическому уравнению $y^3 + py^2 + qy + r = 0$, которое имеет аналитическое решение [13].

Уравнение (11) подстановкой вместо x и y их значений из формул (4) можно преобразовать в "истинное" уравнение изогир, соответствующее реально наблюдаемой форме изогир. В результате будет получено сложное уравнение шестой степени, состоящее из 16 членов. Оно не имеет аналитического решения и потому для практических целей непригодно. По этой причине расчет координат точек изогир по заданным направлениям оптических осей нужно производить с использованием гномонического уравнения (11), а полученные результаты пересчитывать в ортогональные координаты x' и y' по формулам (4).

Следует заметить, что подобный пересчет не потребуется при проецировании на экран коноскопической картины, полученной с точечным источником света. В таком случае уравнение изогир справедливо для коноскопической картины в своем первоначальном виде.

Результаты расчета изогир, проведенные по уравнению (11) в разных сечениях одноосных и двуосных кристаллов для различных углов поворота столика микроскопа, показали, что отображаемая на экране монитора изогир полностью соответствуют реально наблюдаемой коноскопической картине.

Особый интерес представляют результаты построения осевой линии изогир на полной ортогональной проекции при коноскопическом угле, равном 90° (рис. 4). Они позволяют воссоздать виртуальную коноскопическую картину за пределами поля зрения коноскопа, недоступную для наблюдения при работе с обычными объективами из-за их ограниченной апертуры. Выяснилось, что балки креста одноосного кристалла выглядят прямыми лишь в пределах поля зрения коноскопа при работе с объективом $60\times$ (малый круг внутри большого круга, рис. 4а). За его пределами две балки смыкаются на краю проекции в точке, удаленной на 45° от осей координат, в квадранте, в котором находится оптическая ось. Два других конца балок, искривляясь, упираются в край про-

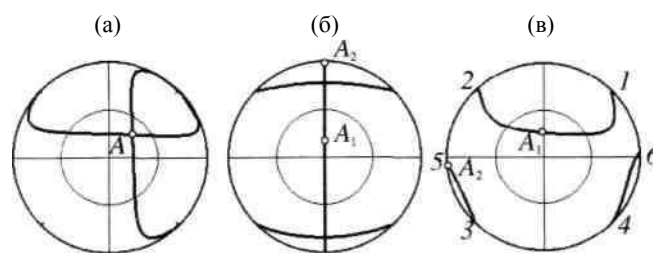


Рис. 4. Осевые линии изогир на полной ортогональной проекции (компьютерное воспроизведение): а - косое сечение одноосного кристалла; б - фигура двойного креста для двуосного кристалла в сечении, перпендикулярном плоскости оптических осей; в - изогир с тремя ветвями в косом сечении двуосного кристалла с $2V = 85^\circ$.

екции в двух противоположных квадрантах, в точках, равноудаленных от координатных осей.

В сечении двуосного кристалла, перпендикулярном плоскости оптических осей, при определенной ориентировке кристалла изогир имеет вид двойного креста (рис. 4б).

В косом сечении двуосного кристалла удивляет присутствие третьей ветви изогир, никогда не наблюдаемой на практике, так как она располагается на краю проекции за пределами поля зрения коноскопа (рис. 4в). Самая крупная *ближняя ветвь* 1—2 проходит через точку выхода оптической оси A_1 , расположенную ближе к центру проекции, чем соответствующая второй оптической оси точка A_2 , с которой связана *дальняя ветвь* 3—5. Третья ветвь 4—6 не проходит через A_1 и A_2 . Концы всех трех ветвей изогир упираются в граничную окружность. Из шести концов изогир четыре (1, 2, 3 и 4) жестко привязаны к фиксированным точкам, удаленным от осей координат на 45° . Эти точки присутствуют на коноскопических картинах любых сечений кристаллов, они неподвижны при вращении столика микроскопа. Концы 5 и 6 мобильные. Их положение зависит от сечения кристалла и угла поворота кристаллической пластинки. На рисунке видно, что изогир, упираясь в край проекции, не прерывается, а находит свое продолжение в противоположающей точке на граничной окружности.

На рис. 5 показано, как ведет себя изогир косого сечения двуосного кристалла на полной ортогональной проекции при вращении кристалла. В исходном положении (позиция погасания кристалла) *ближняя ветвь* изогир проходит через центр проекции ($\omega = 0^\circ$). По разные стороны от нее расположены две другие ветви.

При повороте кристалла на угол $0 < \omega < 90^\circ$ *ближняя ветвь* изогир поочередно, соединяясь сначала с ветвью, не имеющей оси ($\omega = 4.7^\circ$), затем с *дальней ветвью* ($\omega = 69^\circ$), образует косой крест. Таким образом, при повороте кристалла на

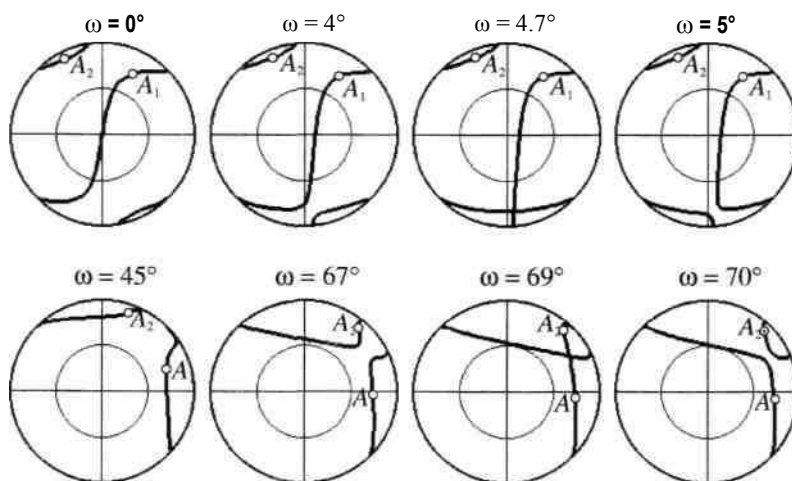


Рис. 5. Изогира на полной ортогональной проекции и ее поведение при вращении столика микроскопа для косого сечения двуосного кристалла с $2V=47^\circ$. ω - угол поворота кристаллической пластинки от позиции погасания кристалла.

360° крест образуется 8 раз. При работе с обычными объективами фигура креста при полном повороте столика возникает только 4 раза.

Ближняя ветвь изогиры при любых позициях всегда опирается на фиксированные точки и только она может пересекать центр проекции. Две другие ветви опираются одним концом на фиксированную точку, вторым — на подвижную точку, меняющую свое местоположение при вращении кристалла, скользя по окружности, ограничивающей поле проекции.

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ИЗОГИРЫ

В качестве примера применения уравнения изогиры для практических целей приведем описа-

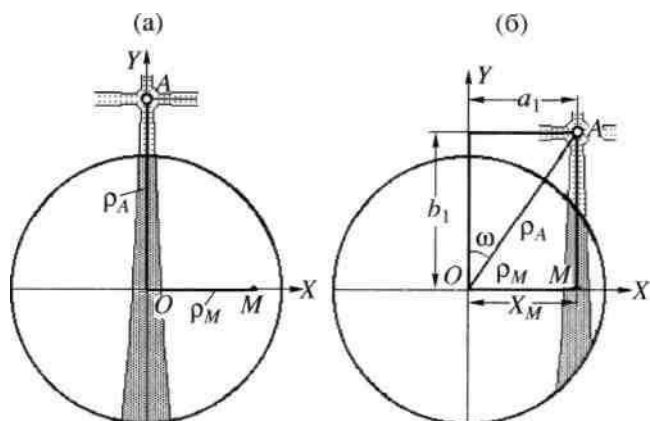


Рис. 6. Измерение наклона оптической оси одноосного кристалла (гномоническая проекция): а - исходное положение (позиция погасания кристалла); б - позиция после поворота столика микроскопа на угол ω .

ние способа коноскопического измерения угла наклона оптической оси одноосного кристалла, предложенного в [14] и использованного для массового замера ориентации оптических осей в зернах кварца с целью выявления предпочтительной ориентировки этого минерала в шлифах горных пород (микроструктурный анализ) [15]. В исходном положении (позиция погасания кристалла) оптическая ось A находится на координатной оси Y за пределами поля зрения коноскопа, следовательно, она недоступна для непосредственного наблюдения и измерения ее наклона ρ_A (дуга OA) с помощью окуляр-микрометра (рис. 6а). Гномонические координаты оптической оси в этой позиции равны: $a_1 = 0$, $b_1 = \text{tg} \rho_A$.

После поворота столика микроскопа на некоторый угол со изогира сместится вправо и достигнет метки M на оси X (рис. 6б). В качестве метки может служить одно из делений шкалы окуляр-микрометра. Ее гномонические координаты: $x = \text{tg} \rho_M$, $y = 0$, где ρ_M - угловое удаление метки от центра O (полярное расстояние), заведомо известное по результатам калибровки шкалы окуляр-микрометра. Координаты точки выхода оптической оси в этой позиции равны:

$$a_1 = \text{tg} \rho_A \sin \omega, \quad b_1 = \text{tg} \rho_A \cos \omega. \quad (13)$$

Так как точка изогиры M находится на оси X ($y = 0$), уравнение (11) принимает вид $(x^2 + 2)(bx - c) = 0$. В этом случае (11) имеет единственный действительный корень

$$x = c/b. \quad (14)$$

Для одноосного кристалла из (12) следует $b = 2b_1$, $c = 2a_1b_1$, из (14) находим $x_M = a_1$. Из этого равенства видно, что при вращении столика микроскопа абсциссы оптической оси A одноосного

кристалла и точки пересечения изогирой оси X всегда равны друг другу, поэтому из (13) найдем

$$\operatorname{tg} \rho_A = \operatorname{tg} \rho_M / \sin \omega \quad (15)$$

Подобная, но значительно более сложная задача определения ориентации оптических осей решена автором для косых сечений двуосного кристалла. Для этого необходимо снять координаты x и y трех точек изогирой, подставить их в уравнение (11), решить систему трех уравнений и найти значения параметров a , b , c и d , зная которые, с помощью (12) можно рассчитать гномонические координаты оптических осей. Последние пересчитываются в сферические координаты и далее по ним графически, на стереографической сетке, или аналитически, по формулам сферической тригонометрии, определяются угол оптических осей и ориентация оптической индикатрисы.

Как известно, применение коноскопического метода связано с рядом ограничений, сужающих его возможности, а именно:

- для измерения угла $2V$ между оптическими осями пригодны только сечения кристалла, ориентированные перпендикулярно острой биссектрисе;
- измеряемый угол $2V$ не должен превышать 50° – 60° ;
- отсутствует возможность определения ориентации оптической индикатрисы.

Использование уравнения изогирой позволяет снять эти ограничения и приблизить возможности коноскопического метода к результатам, получаемым на федоровском универсальном столике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований выведено гномоническое уравнение изогирой. Вопреки существующему представлению оказалось, что оно соответствует не гиперболе, а более сложной кривой линии третьего порядка. Проведено графическое построение осевой линии изогирой при максимальном угловом охвате - 180° . Выявлены необычные формы изогирой и особенности ее поведения при вращении кристалла, ранее не описанные в литературе и не наблюдаемые при рабо-

те с обычными объективами из-за их ограниченной апертуры.

Предложено использовать уравнение изогирой в качестве основы для разработки новых способов измерения угла оптических осей и элементов ориентировки оптической индикатрисы, существенно расширяющих возможности коноскопического метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Michel-Levi A., Lacroix A.* // Les Mineraux des Roches. Librairie Polytechnique. Paris: Baudry. Paris. 1888. P. 94.
2. *Becke F.* // Die Skiodromen. Tscherm. miner. und petr. 1905. Mitt. 24. P. 1.
3. *Wright F.E.* // The methods of petrographic-microscopic research. Washington: Carnegie Institution, 1911. №158. 200 p.
4. *Kamb W.B.* // Am. Mineral. 1958. V. 43. P. 1029.
5. *Татарский В.Б.* // Кристаллооптика и иммерсионный метод исследования минералов. М.: Наука, 1965. 306 с.
6. *Стойбер Р., Морзе С.* // Определение кристаллов под микроскопом. М.: Мир, 1974. 281 с.
7. *Bethke C.M., Birnie R.W.* // Am. Mineral. 1980. V. 65. P. 1294.
8. *Константинова А.Ф., Гречушников Б.Н., Бокуть Б.В., Валяшко Е.Г.* // Оптические свойства кристаллов. Минск: Наука и техника, 1995. 302 с.
9. *Рудой К.А., Набатов Б.В., Строганов В.И. и др.* // Кристаллография. 2003. Т. 48. № 2. С. 359.
10. *Компанейцев В.П.* // Изв. АН КазССР. № 4. 1992. С. 18.
11. *Шубников А.В.* Основы оптической кристаллографии. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 207 с.
12. *Компанейцев В.П.* // Геология Казахстана. № 2. 1995. С. 55.
13. *Корн Г., Корн Т.* // Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.
14. *Компанейцев В.П.* // Авторское свидетельство № 1566208 "Способ измерения наклона оптической оси одноосного кристалла". Заявл. 26.09.88. Опубл. 23.05.90. Бюлл. № 19. 1990.
15. *Компанейцев В.П.* // Изв. АН КазССР. Сер. геол. 1990. № 6. С. 80.